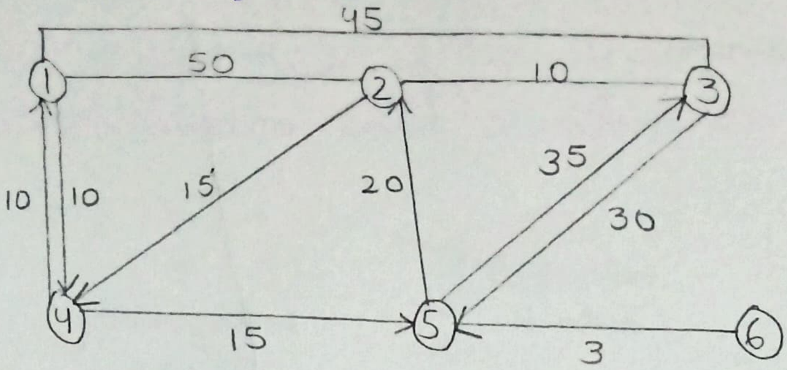
1 Solve by employing Dijkstra's Algorithm

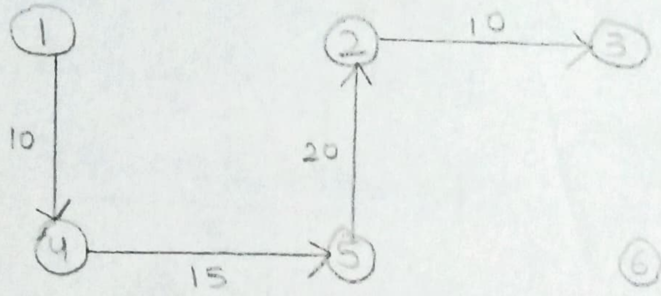


Ans→ Dijkstra's Algorithm = If a weighted graph is given then we have to find the shortest path between different vertices from any source vertex.

$$d(u) + c(u,v) < d(v)$$

Let Selected Vertex be 1;

Selected Vertex	2	3	4	5	6
	∞	∞	∞	∞	∞
1	50	45	10	∞	∞
1,4	50	45	10	25	∞
1,4,5	45	45	10	25	∞
1,4,5,2	45	45	10	25	∞
1,4,5,2,3	45	45	10	25	∞
1,4,5,2,3,6	45	45	10	25	∞



2. Solve by $a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 3^n$ where $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Ans→ The given equation is of non-homogeneous linear recurrence relation with constant co-efficients.

$$a_n = a_n^{(H)} + a_n^{(P)}$$

General Solution ← a_n; $a_n^{(H)}$ ↓ Homogeneous solution; $a_n^{(P)}$ → Particular Solution

For $a_n^{(H)}$;

Let $a_n = r^n$, $a_{n-1} = r^{n-1}$ and $a_{n-2} = r^{n-2}$. Therefore equations becomes,

$$r^n - 6r^{n-1} + 8r^{n-2} = 0$$

$$r^n\left(1 - \frac{6}{r} + \frac{8}{r^2}\right) = 0$$

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

$$r(r-4) - 2(r-4) = 0$$

$$(r-2)(r-4) = 0$$

$$r = 2, 4$$

For real and distinct roots, the characteristic equations becomes;

$$a_n = (b_1)r_1^n + (b_2)r_2^n$$

$$a_n = 2^n b_1 + 4^n b_2$$

For $a_n^{(P)}$ = 3^n is not a characteristic root

$\therefore$
$$a_n^{(P)} = 3^n A_0$$

$$3^n A_0 - 6 \cdot 3^{n-1} A_0 + 8 \cdot 3^{n-2} A_0 = 3^n$$

$$A_0 - \frac{6}{3}A_0 + \frac{8}{9}A_0 = 1$$

$$\frac{9A_0 - 18A_0 + 8A_0}{9} = 1$$

$$-\frac{A_0}{9} = 1$$

$$A_0 = -9$$

$$(a_n^{(P)} = 3^n - 9) \times$$

$$a_n^{(P)} = 3^n \cdot 9$$

General Solution :- $a_n = a_n^{(H)} + a_n^{(P)}$

$$a_n = 2^n b_1 + 4^n b_2 - 3^n \cdot 9 \quad - (i)$$

When $a_0 = 3$, equation (i) becomes,

$$3 = b_1 + b_2 - 9$$

$$b_1 + b_2 = 12$$

$$b_1 = 12 - b_2 \quad - (1)$$

When $a_1 = 7$, equation (i) becomes,

$$7 = 2b_1 + 4b_2 - 27$$

$$2b_1 + 4b_2 = 34$$

$$2(b_1 + 2b_2) = 34$$

$$b_1 + 2b_2 = 17$$

$$12 - b_2 + 2b_2 = 17$$

$$b_2 = 17 - 12$$

$$b_2 = 5$$

Put $b_2 = 5$ in equation (1),

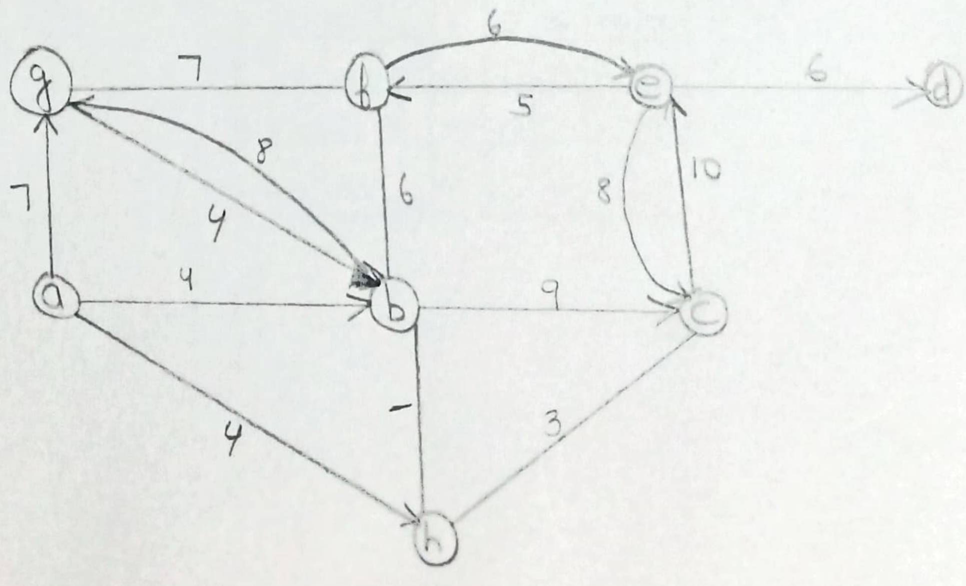
$$b_1 = 12 - 5$$

$$b_1 = 7.$$

Therefore, final solution becomes;

$$a_n = 7 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n - 9 \cdot 3^n.$$

3. Solve using Floyd Warshall's algorithm:



Ans-> Floyd Warshall Algorithm is an algorithm which is used to find shortest path ~~wit~~ between different nodes in a network problem or in graph.

In this algorithm, we first create a D_0 matrix of $n \times n$ where n is the number of vertices.

D_0 =

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	∞	∞	∞	∞	7	4
b	∞	0	9	∞	∞	6	8	1
c	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	6	0	∞	∞
g	∞	4	∞	∞	∞	7	0	∞
h	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	0

In the second step, we create $D_a, D_b, \ldots, D_h$ matrices using D_0 as base. We create D_a from D_0 using 'a' node to find shortest path. Repeat this step as to create D_b from D_a, D_c from D_b, D_d from D_c, and so on.

D_a =

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	∞	∞	∞	∞	7	4
b	∞	0	9	∞	∞	6	8	1
c	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	6	0	∞	∞
g	∞	4	∞	∞	∞	7	0	∞
h	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	0

$D_b =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	13	∞	∞	10	7	4
b	∞	0	9	∞	∞	6	8	1
c	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	6	0	∞	∞
g	∞	4	13	∞	∞	7	0	∞
h	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	0

$D_c =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	13	∞	23	10	7	4
b	∞	0	9	∞	19	6	8	1
c	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	6	0	∞	∞
g	∞	∞	13	∞	23	∞	0	∞
h	∞	∞	3	∞	13	∞	∞	0

$D_d =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	13	∞	23	10	7	4
b	∞	0	9	∞	19	6	8	1
c	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	6	0	∞	∞
g	∞	∞	13	∞	23	∞	0	∞
h	∞	∞	3	∞	13	∞	∞	0

$D_e =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	13	29	23	10	7	4
b	∞	0	9	25	19	6	8	1
c	∞	∞	0	16	10	15	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	14	12	6	0	∞	∞
g	∞	∞	13	29	23	28	0	∞
h	∞	∞	3	19	13	18	∞	0

$D_f =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	13	22	16	10	7	4
b	∞	0	9	18	12	6	8	1
c	∞	∞	0	16	10	15	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	14	12	6	0	∞	∞
g	∞	∞	13	29	23	28	0	∞
h	∞	∞	3	19	13	18	∞	0

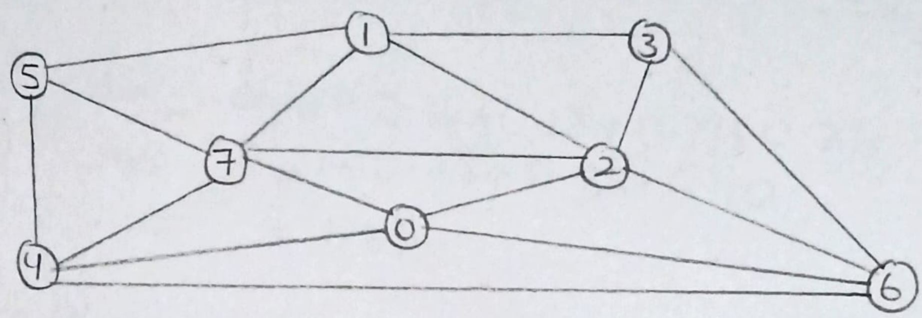
$D_g =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	13	22	16	10	7	4
b	∞	0	9	18	12	6	8	1
c	∞	∞	0	16	10	15	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	14	12	6	0	∞	∞
g	∞	∞	13	29	23	28	0	∞
h	∞	∞	3	19	13	18	∞	0

$D_h =$

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	4	7	22	16	10	7	4
b	∞	0	4	18	12	6	8	1
c	∞	∞	0	16	10	15	∞	∞
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
e	∞	∞	8	6	0	5	∞	∞
f	∞	∞	14	12	6	0	∞	∞
g	∞	∞	13	29	23	28	0	∞
h	∞	∞	3	19	13	18	∞	0

4. Solve by using Kruskal's Algorithm, find the minimum spanning tree.

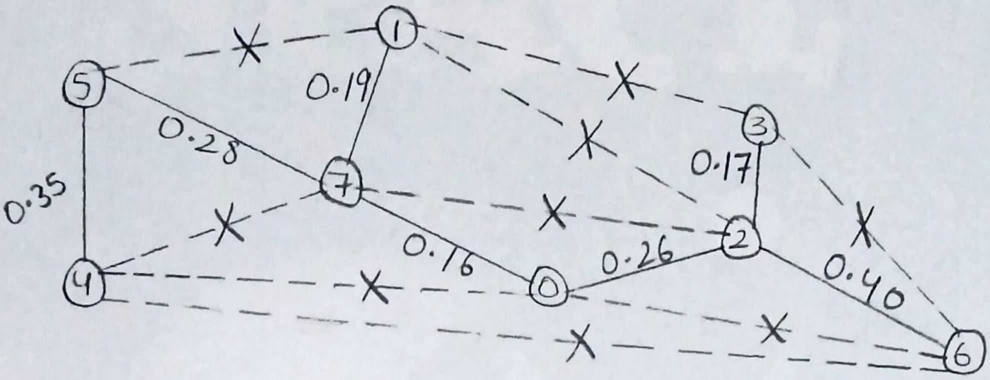


Ans-> It is a greedy algorithm that finds a minimum spanning tree for a connected weighted graph. It finds a tree of that graph which includes every vertex & the total weight of all the edges in the tree is less than or equal to every possible spanning tree.

From given question, we have all edges in ascending order of their edge weight;

e_1	(0,7)	0.16
e_2	(2,3)	0.17
e_3	(1,7)	0.19
e_4	(0,2)	0.26
e_5	(5,7)	0.28
e_6	(1,3)	0.29
e_7	(1,5)	0.32
e_8	(2,7)	0.34
e_9	(4,5)	0.35
e_{10}	(1,2)	0.36
e_{11}	(4,7)	0.37
e_{12}	(0,4)	0.38

e_{13}	(6,2)	0.40
e_{14}	(3,6)	0.52
e_{15}	(6,0)	0.58
e_{16}	(6,4)	0.93



Total edge weight $= 0.16 + 0.17 + 0.19 + 0.26 + 0.28 + 0.35 + 0.40$
$= 1.81$